**Лекция 1**

**Теоретические основы математического моделирования и методы планирования эксперимента**

*Математическое моделирование и вычислительный эксперимент*

*Предмет математического моделирования*

Математическая модель – это приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики. Основная цель моделирования – исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений. Однако моделирование – это еще и метод познания окружающего мира, дающий возможность управлять им. Математическое моделирование и связанный с ним компьютерный эксперимент незаменимы в тех случаях, когда натурный эксперимент невозможен или затруднен по тем или иным причинам. Отметим некоторые существенные для исследований особенностях механических систем и процессов. Во-первых, факторы, определяющие такие объекты, характеризуются, как измеримые величины – параметры. Во-вторых, в основе таких моделей лежат уравнения, описывающие фундаментальные законы природы (механики), не нуждающиеся в пересмотре и уточнении. В-третьих, наибольшую трудность при разработке моделей механических систем и процессов представляет описание недостоверно известных характеристик объекта, как функциональных, так и числовых. В-четвертых, современные требования к таким моделям приводят к необходимости учета множества факторов, влияющих на поведение объекта, не только таких, которые связаны известными законами природы.

**Этапы построения математических моделей:** содержательная, концептуальная и математическая постановка задачи моделирования

1. Содержательная постановка Необходимость в новой модели может появиться в связи с проведением научных исследований (особенно – на стыке различных областей знания), выполнением проектных и конструкторских работ на производстве, созданием систем автоматического управления, планирования и контроля. Человека или организацию, заинтересованных в разработке новой математической модели, для краткости будем называть заказчиком. После принятия решения о необходимости построения новой математической модели заказчик ищет исполнителя своего заказа. Основной целью данного этапа является подготовка содержательной постановки задачи моделирования. Перечень сформулированных в содержательной (словесной) форме основных вопросов об объекте моделирования, интересующих заказчика, составляет содержательную постановку задачи моделирования.

2. Концептуальная постановка задачи моделирования Концептуальная постановка задачи моделирования – это сформулированный в терминах конкретных дисциплин (физики, химии, биологии и т.д.) перечень основных вопросов, интересующих заказчика, а также совокупность гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования. Наибольшие трудности при формулировке концептуальной постановки приходится преодолевать в моделях, находящихся на “стыке” различных дисциплин.

3. Математическая постановка задачи моделирования Законченная концептуальная постановка позволяет сформулировать математическую постановку задачи моделирования, включающую совокупность различных математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования. Математическая постановка задачи моделирования – это совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования. Совокупность математических соотношений определяет вид оператора модели. Для создания математических моделей сложных систем и процессов, применимых для широкого класса реальных задач требуется привлечение большого объема знаний, накопленных в рассматриваемой дисциплине (а в некоторых случаях и в смежных областях). Математические модели основываются на математическом описании объекта. В математическое описание, прежде всего, входят, и это естественно, взаимосвязи параметров объекта, что характеризует его особенности функционирования. Такие связи могут представляться в виде: – вектор-функций y = f (x,t), – неявных функций F(x, y,t) = 0, – обыкновенных дифференциальных уравнений ( , , ,..., , ) 0 ( ) = ′ ″ F x x x x t m , – дифференциальных уравнений с частными производными ( , , , , ,...)= 0 ∂ ∂ ∂ ∂ t y t x F x y t , – интегро-дифференциальных уравнений ( , , , , ,...) Ω = 0 ∂ ∂ ∂ ∂ ∫ Ω d t y t x F x y t , – оптимизационных задач extr f (x) x∈X , – вычислительного алгоритма, – вероятностного (стохастического) описания. Под математическим описанием понимается полная совокупность данных, функций и методов вычисления, позволяющая получать результат. Простейшая классификация математических моделей в зависимости от природы объекта, решаемых задач и применяемых методов, происходит следующим образом: – линейные или нелинейные (описываемые функциями, которые содержат основные параметры только в степени 0 и 1, или любыми видами функций), 16 – стационарные или нестационарные (независящие или зависящие от времени), – непрерывные или дискретные, – детерминированные или стохастические (точные, однозначные или вероятностные), – четкие или нечеткие (примеры нечетких множеств: около 10; глубоко или мелко; хорошо или плохо).

Алгоритм научных исследований с помощью математического моделирования

Математическое моделирование – мощное современное средство научных исследований и его применение требует соблюдения определенной строгости во избежание получения неверных выводов. Процесс моделирования состоит из следующих этапов: 1) изучение оригинала: выявление основных факторов, особенностей, диапазонов исследуемых параметров, условий и задач исследования, постановка (формулировка) задачи исследования, оценка требуемой точности (содержательная постановка); 2) феноменологическое описание оригинала («физическое» описание): поиск аналогий и функциональных зависимостей на основе предыдущего этапа и достижений в различных областях науки (концептуальная постановка); 3) математическое описание оригинала (математическая постановка); 4) разработка алгоритмического и программного обеспечения для реализации математического описания с помощью ЭВМ; 5) проведение контрольного вычислительного эксперимента (воспроизводящего реальный известный случай поведения оригинала в конкретных условиях); 6) оценка адекватности результатов контрольного вычислительного эксперимента реальному случаю; при необходимости – повторение алгоритма с пункта 3, 2 или 1; 7) планирование вычислительного эксперимента в целях исследования; 8) проведение вычислительного эксперимента в целях исследования, обработка его результатов; 9) анализ результатов вычислительного эксперимента, сравнение с результатами изучения оригинала (при необходимости – повторение алгоритма с пункта 7 или 1); 10) формулировка выводов исследования.

**Понятие вычислительного эксперимента**

Широкое применение ЭВМ в математическом моделировании, достаточно мощная теоретическая и экспериментальная база позволяют говорить о вычислительном эксперименте как о новой технологии и методологии в научных и прикладных исследованиях. Вычислительный эксперимент – это эксперимент над математической моделью объекта на ЭВМ, который состоит в том, что по одним параметрам модели вычисляются другие её параметры и на этой основе делаются выводы о свойствах явления, описываемого математической моделью. При проведении вычислительного эксперимента можно убедиться в необходимости и полезности последнего, особенно в случаях, когда провести натуральный эксперимент затруднительно или невозможно. Вычислительный эксперимент, по сравнению с натурным, значительно дешевле и доступнее, его подготовка и проведение требует меньшего времени, его легко переделывать, он даёт более подробную информацию. Кроме того, в ходе вычислительного эксперимента выявляются границы применимости математической модели, которые позволяют прогнозировать эксперимент в естественных условиях.

**Проверка адекватности модели**

Под адекватностью математической модели будет пониматься степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой задачи. Прежде чем переходить к проверке адекватно- 18 сти модели, необходимо убедиться в правильном комплексном функционировании всех алгоритмов и программ модели, выполнить независимое тестирование и отладку всех отдельных алгоритмов (например, используемых программных модулей, реализующих используемый численный метод). Проверка разработанной математической модели выполняется путем сравнения с имеющимися экспериментальными данными о реальном объекте или с результатами других, созданных ранее и хорошо себя зарекомендовавших моделей. В первом случае говорят о проверке путем сравнения с экспериментом, во втором – о сравнении с результатами решения тестовой задачи. Решение вопроса о точности моделирования зависит от требований, предъявляемых к модели, и ее назначения. При этом должна учитываться точность получения экспериментальных результатов или особенности постановок тестовых задач. В моделях, предназначенных для выполнения оценочных и прикидочных расчетов, удовлетворительной считается точность 10-15%. В моделях, используемых в управляющих и контролирующих системах, требуемая точность может быть 1-2% и даже более. При возникновении проблем, связанных с адекватностью модели, ее корректировку требуется начинать с последовательного анализа всех возможных причин, приведших к расхождению результатов моделирования и результатов эксперимента.

**Применение инструментальных средств пакета Matlab** для решения прикладных задач MATLAB – это высокоуровневый язык технических расчетов, интерактивная среда разработки алгоритмов и современный инструмент анализа данных. Ядро MATLAB позволяет максимально просто работать с матрицами реальных, комплексных и аналитических типов данных и со структурами данных и таблицами поиска.

Язык MATLAB является высокоуровневым языком программирования, включающим основанные на матрицах структуры данных, широкий спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования. Программы, написанные на MATLAB, бывают двух типов – функции и скрипты. Функции имеют входные и выходные аргументы, а также собственное рабочее пространство для хранения промежуточных результатов вычислений и переменных. Скрипты же используют общее рабочее пространство. Как скрипты, так и функции не интерпретируются в машинный код и сохраняются в виде текстовых файлов. Основной особенностью языка MATLAB является его широкие возможности по работе с матрицами, которые создатели языка выразили в лозунге думай векторно (англ. Think vectorized). MATLAB предоставляет пользователю большое количество (несколько сотен) функций для анализа данных, покрывающие практически все области математики, в частности: матрицы и линейная алгебра, многочлены и интерполяция, математическая статистика и анализ данных, обработка данных, дифференциальные уравнения, разреженные матрицы, целочисленная арифметика. MATLAB предоставляет удобные средства для разработки алгоритмов, включая высокоуровневые с использованием концепций объектноориентированного программирования. В нём имеются все необходимые средства интегрированной среды разработки, включая отладчик и профайлер. Функции для работы с целыми типами данных облегчают создание алгоритмов для микроконтроллеров и других приложений, где это необходимо. В составе пакета MATLAB имеется большое количество функций для построения графиков, в том числе трёхмерных, визуального анализа данных и создания анимированных роликов. Встроенная среда разработки позволяет создавать графические интерфейсы пользователя с различными элементами управления, такими как кнопки, поля ввода и другими. С помощью компонента MATLAB Compiler эти графические интерфейсы могут быть преобразованы в самостоятельные приложения.